# AKADEMIA EDUKACYJNO - INŻYNIERSKA

## www.e-MECHANiK.com.pl

**MATURA STUDIA PRAKTYKA STAŻ PRACA BIZNES PRZEMYSŁ STEAM**

KOMPLEKSOWE WSPARCIE EDUKACYJNE **ON – LINE** NA KAŻDYM ETAPIE KSZTAŁCENIA INŻYNIERSKIEGO

email: **kontakt@e-mechanik.com.pl**
web: **www.e-MECHANiK.com.pl**
fb: www.facebook.com/groups/emechanik
tel: **(+48) - 697-165-075**

Wszystkie prawa zastrzeżone All rights reserved

# ANALIZA MATEMATYCZNA II

## "CAŁKA II - POLE OBSZARU OGRANICZONEGO POWIERZCHNIAMI"

**PROJEKT**

Oblicz:

- całkę podwójną

interpretowaną jako objętość obszaru ograniczonego powierzchniami.

**DANE:**

$z(x,y) = OK$

**SZUKAM:**

$V = ?$

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2} = \quad D: \begin{cases} x^2+y^2 \le x \\ x^2+y^2 \le y \end{cases}$$

- $x^2+y^2 \le x$

$x^2 - x + y^2 \le 0$

$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} \le 0$

$(x-\frac{1}{2})^2 + y^2 \le (\frac{1}{2})^2$

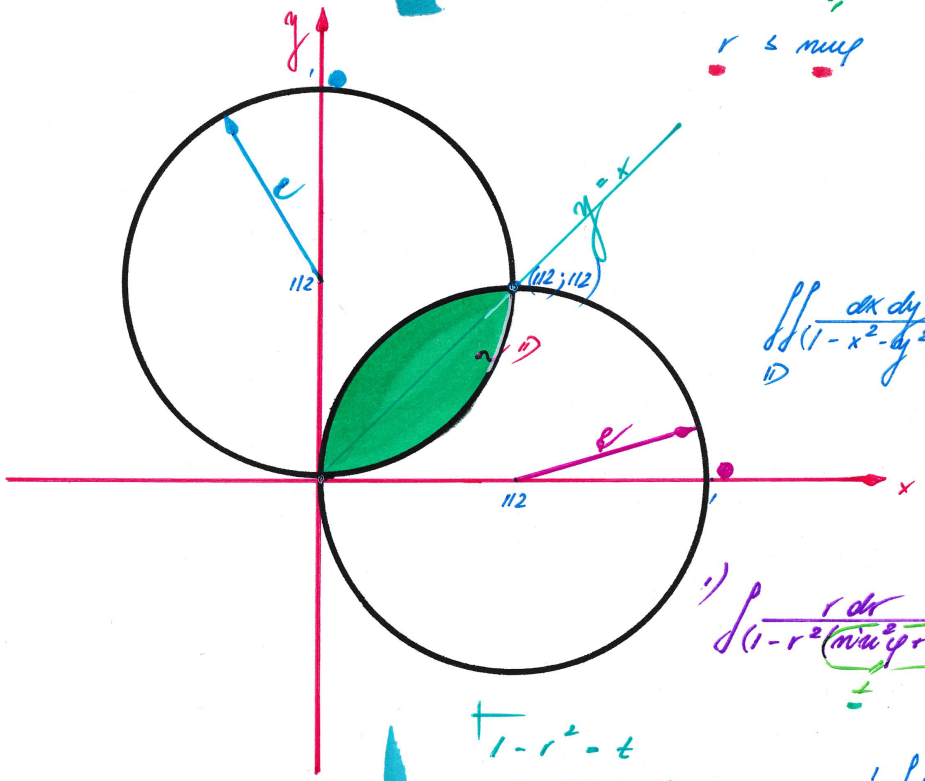
- $x^2+y^2 \le y$

$x^2 + y^2 - y \le 0$

$x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \le 0$

$x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \le (\frac{1}{2})^2$

$D: \begin{cases} 0 \le \varphi \le \pi/4 \\ 0 \le r \le \sin\varphi \end{cases}$




- $x^2+y^2 \le y$

$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 \le r\sin\varphi$

$r^2\underbrace{(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}_{1} \le r\sin\varphi$

$r \le \sin\varphi$

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2} = 2\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\sin\varphi} \frac{r\,dr}{((1-(r\cos\varphi)^2-(r\sin\varphi)^2)^2}$$

$$\int \frac{r\,dr}{(1-r^2\underbrace{(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)}_{1})^2} = \int \frac{r\,dr}{(1-r^2)^2} =$$

$1-r^2 = t$

$-2r\,dr = dt$

$r\,dr = -\frac{1}{2}dt$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{2(1-r^2)} + C$$

$$\int_0^{\sin\varphi} \frac{r\,dr}{(1-r^2)^2} = \left(\frac{1}{2(1-r^2)} + C\right)_0^{\sin\varphi} = \frac{1}{2(1-\sin^2\varphi)} - \frac{1}{2}$$

II) $\int \left( \frac{1}{2(1-\sin^2\varphi)} - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{1-\sin^2\varphi} \right) d\varphi - \frac{1}{2} \int d\varphi$ (III, IV)

III) $\int \frac{1}{1-\sin^2\varphi} d\varphi = \int \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi = \operatorname{tg}\varphi + C$

$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi = (\operatorname{tg}\varphi + C)_0^{\pi/4} = 1$

IV) $\int d\varphi = \varphi + C$

$\int_0^{\pi/4} d\varphi = (\varphi + C)_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$

$\iint \frac{dx\,dy}{(1-x^2-y^2)^2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \frac{\pi}{4}$

e
-mechanik
.COM
.PL